

٢ اختبارات تقارب التكاملات المعتلة

كيف نعرف ما إذا كان تكامل معتل ما تقاربي أو تباعدي؟ حتى الآن لدينا طريقتان: أن نستخدم التعريف (أي نحسب التكامل على فترة مغلقة ثم نأخذ النهاية) أو شرط كوشي (أي نحسب التكامل على فترة قريبة من الطرف المعتل ثم نثبت أن قيمته صغيرة جداً) لكن ماذا نفعل لو كان حساب التكامل صعب في حد ذاته؟ سنقدم فيما يلي عدة اختبارات للتقارب، وكلها شروط كافية للتقارب لكنها غير لازمة. قيمة هذه الاختبارات أنها تقدم وسيلة فعالة لإثبات تقارب تكامل معتل، لكن جانب النقص الرئيسي فيها أنها لا تعطي وسيلة لحساب قيمة التكامل. سنصيغ تلك الاختبارات في صورة عامة، فنأخذ J للتعبير عن أي من الفترات $[a, b]$ أو $[a, b[$ أو $] -\infty, b]$ أو $[a, +\infty[$ ، وبالتالي يمكننا التعبير عن أي تكامل معتل بكتابة $\int_J f(x) dx$.

١-٢- اختبار المقارنة: لتكن $f(x)$ دالة غير سالبة على الفترة J وقابلة للتكامل بمفهوم ريمان على أي فترة مغلقة ومحدودة $I \subset J$ ، إذا كانت $g(x)$ دالة تحقق

$$(a) \quad f(x) \leq g(x) \text{ لكل } x \in J$$

$$(b) \quad \int_J g(x) dx \text{ تقاربي}$$

فإن التكامل $\int_J f(x) dx$ تقاربي.

برهان - سنكتب البرهان في حالة التكاملات على الصورة $\int_{a+0}^b f(x) dx$. الحالات الأخرى نبرهن بشكل مماثل.

لتكن f, g نحققان شروط النظرية. من تقارب $\int_{a+0}^b g(x) dx$ وباستخدام شرط كوشي نجد أنه لأي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لأي $c, d \in]a, a + \delta[$ يكون

$$\int_c^d g(x) dx < \varepsilon$$

لكن الشرط $f(x) \leq g(x)$ يستلزم

$$\int_c^d f(x) dx < \int_c^d g(x) dx < \varepsilon$$

أي أن $\int_{a+0}^b f(x) dx$ يحقق شرط كوشي هو الآخر ويكون بالتالي تقاربياً.

٢-٢- أمثلة:

(a) ندرس التكامل $\int_{0+}^1 \frac{1}{x^{1/2} + 2x^{2/3} + 5x^{1/4}} dx$. من الصعب حساب دالة مقابلة للدالة المكاملة. لذا نستخدم اختبار المقارنة. نلاحظ أن

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2} + 2x^{2/3} + 5x^{1/4}} \leq \frac{1}{7x^{2/3}} = g(x)$$

وحيث أن $\int_{0+}^1 \frac{1}{7x^{2/3}} dx$ تقاربي فإن $\int_{0+}^1 \frac{1}{x^{1/2} + 2x^{2/3} + 5x^{1/4}} dx$ تقاربي.

(٢) ندرس التكامل $\int_e^\infty \frac{\sin x}{x^2 \ln x} dx$ ، من الواضح أن

$$\left| \frac{\sin x}{x^2 \ln x} \right| \leq \frac{1}{x^2 \ln x}$$

وحيث أن $\int_e^\infty \frac{1}{x^2 \ln x} dx$ تقاربي (برهن ذلك) فإن تقارب $\int_e^\infty \left| \frac{\sin x}{x^2 \ln x} \right| dx$ ينتج من اختبار

المقارنة. أي أن $\int_e^\infty \frac{\sin x}{x^2 \ln x} dx$ تقاربي تقارب مطلق.

من الممكن أيضا استخدام اختبار المقارنة لإثبات تباعد التكاملات وذلك بإعادة صياغة النظرية السابقة كما يلي:

٢-٣-إختبار المقارنة (٢): لتكن $f(x)$ دالة غير سالبة على الفترة J وقابلة للتكامل بمفهوم ريمان على أي فترة مغلقة ومحدودة $I \subset J$ ، إذا كانت $g(x)$ دالة تحقق

$$(a) \quad g(x) \leq f(x) \quad \text{لكل } x \in J$$

$$(b) \quad \int_J g(x) dx \text{ تباعدي}$$

فإن التكامل $\int_J f(x) dx$ تباعدي.

مقارنة رتب الدوال

لا تقتصر المقارنة على إيجاد علاقة $<$ أو $>$ بين دالتين، وإنما يمكن أيضا مقارنة رتب الدوال:

٤-٢-تعريفات: لتكن f و g دالتان معرفتان على مجموعة $D \subset \mathbb{R}$ ، ولتكن a نقطة تراكم لـ D (حيث $a \in \mathbb{R}$ أو $a = \pm\infty$).

(١) نقول أن f ذات رتبة صفرية بالنسبة إلى g (ويرمز لها $f = o(g)$) عند a إذا كان

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

(٢) نقول أن f و g من نفس الرتبة (ويرمز لذلك: $f \equiv g$) عند a إذا كان

$$0 < \lim_{t \rightarrow a} \left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| < +\infty.$$

(٣) نقول أن f لا تزيد في الرتبة عن g (ويرمز لذلك: $f = O(g)$) عند a إذا كانت

$$\frac{f(t)}{g(t)} \text{ محدودة حول } a.$$

٥-٢-أمثلة:

(١) لتكن $f(t) = t^s, g(t) = t^r$ ولتكن $a = 0$ ، من الواضح أنه إذا كانت $s > r \geq 0$ فإن $f = o(g)$ عند 0 وذلك لأن

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^s}{t^r} = 0.$$

(٢) لنفس الدالتين f, g لكن عندما $a = +\infty$ ، فإن $g = o(f)$ وذلك لأن

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^r}{t^s} = 0.$$

(٣) يمكن إثبات أن $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^r} = 0$ لأي $r > 0$ ، أي أن $\ln t = o(t^r)$ عند $+\infty$.

(٤) $\sin t = O(1)$ عند $+\infty$ لأن $\sin t$ دالة محدودة.

(٥) $\sin t \equiv t$ عند 0 .

(٦) حيث أن $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ فإن $\ln(t+1) \equiv t$ عند 0 .

٦-٢ - إختبار المقارنة بالرتبة: لتكن $f(x)$ دالة غير سالبة على الفترة $J = [a, b]$ وقابلة للتكامل بمفهوم ريمان على أي فترة مغلقة ومحدودة $I \subset J$. ولتكن $b = +\infty$ أو f غير محدودة بالقرب من b .

(١) إذا كانت $g(x)$ دالة تحقق $f = O(g)$ عند b ، فإن تقارب $\int_J g(x) dx$ يستلزم تقارب $\int_J f(x) dx$.

(٢) إذا كانت $g(x)$ دالة تحقق $g = O(f)$ عند b ، فإن تباعد $\int_J g(x) dx$ يستلزم تباعد $\int_J f(x) dx$.

(٣) إذا كانت $g(x)$ دالة تحقق $f = o(g)$ عند b ، فإن تقارب $\int_J g(x) dx$ يستلزم تقارب $\int_J f(x) dx$.

(٤) إذا كانت $g(x)$ دالة تحقق $f \equiv g$ عند b ، فإن التكاملان $\int_J f(x) dx$ ، $\int_J g(x) dx$ يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً.

برهان - (١) و (٢) هي نظرية (٢.١).
(٣) نتج من (١) لأن

$$f = o(g) \implies f = O(g)$$

٧-٢ - أمثلة:

$$(١) \text{ لندرس تقارب التكامل } \int_0^1 \frac{1}{x^{2/3} + 4x^{1/3}e^{-3x} + 2x^{1/2}e^{-x^2}} dx$$

من الواضح أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x^{2/3} + 4x^{1/3}e^{-3x} + 2x^{1/2}e^{-x^2}}$ غير محدودة فقط قرب 0. وأن الحد $x^{2/3}$ هو أصغر حد في المقام وبالتالي هو الذي يعطي أكبر تأثير في التكامل. نقارن هذه الدالة بالدالة $g(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$ فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

أي أن $f = o(g)$. وحيث أن التكامل $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}} dx$ تقاربي فإن $\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3} + 4e^{-3x} + 2x^{1/2}e^{-x^2}} dx$ تقاربي.

$$(٢) \text{ التكامل } \int_1^\infty \frac{\sin(x^3)}{x^{3/2}} dx \text{ تقاربي تقارب مطلق لأن}$$

$$\text{عند } \infty \quad \frac{\sin(x^3)}{x^{3/2}} = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

فبالمقارنة بالرتبة وتقارب التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ ينتج المطلوب.

يجب هنا التأكيد على أن اختبارات المقارنة السابقة كلها لا تنطبق إلا على الدوال الموجبة. يمكن إذا استخدام هذه الاختبارات لدراسة تقارب التكامل المعتل لدالة موجبة، وفي حالة الدوال السالبة يمكن ضرب الدالة في -1 لتنتج دالة موجبة ودراسة تكاملها مع ملاحظة أن تكاملات $f(x)$ و $-f(x)$ لها نفس السلوك من حيث التقارب والتباعد. وفي حالة الدوال متغيرة الإشارة (أي التي تكون موجبة على بعض أجزاء فترة التكامل وسالبة على أجزاء أخرى) يصلح اختبار المقارنة لدراسة التقارب المطلق، لأننا في هذه الحالة ندرس تكامل الدالة $|f(x)|$ وهي دالة موجبة.

لدراسة التقارب المشروط لا نستطيع استخدام اختبارات المقارنة، الأسلوب المعتاد في هذه الحالة هو استخدام اختبار آبل - ديريكليه.

٨-٢- اختبار آبل ديريكليه (Abel-Dirichlet test): لتكن $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ حيث h, g دالتان مكرفتان ومتصلتان على الفترة $J = [a, b[$ (حيث $b \in \mathbb{R}$ أو $b = +\infty$) وتحققان

$$(a) \quad h(x) \text{ موجبة وتناقصية على } J \text{ و } \lim_{x \rightarrow b} h(x) = 0$$

$$(b) \quad \text{الدالة } G(y) = \int_a^y g(x) dx \text{ دالة محدودة.}$$

فإن التكامل $\int_J f(x) dx$ تقاربي.

برهان - نضع $M = \sup_{y \in J} |G(y)|$. ليكن $\varepsilon > 0$ ، من معرفة أن $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = 0$ يمكن إيجاد $L < b$ بحيث $h(c) < \varepsilon/2M$ لأي $c > L$. نأخذ $d > c > L$ فنجد

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d h(x)g(x) dx \right| &\leq h(c_0) \left| \int_c^d g(x) dx \right| \\ &\text{لقيمة ما } c_0 \text{ من نظرية القيمة المتوسطة للتكامل} \\ &\leq h(c_0) \left| \int_a^d g(x) dx - \int_a^c g(x) dx \right| \\ &\leq h(c_0)(|G(d)| + |G(c)|) \\ &\leq 2Mh(c_0) < \varepsilon \end{aligned}$$

ينتج أن التكامل $\int_J f(x) dx$ يحقق شرط كوشي للتقارب فهذه إذن تقاربي.

٩-٢- نتيجة: لتكن h دالة متصلة وموجبة وتناقصية على الفترة $J = [1, +\infty[$ ونحقق $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

فإن التكاملين $\int_J h(x) \sin x dx$ و $\int_J h(x) \cos x dx$ تقاربين.

١٠.٢ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

$$(1) \quad \text{تقارب } \int_J f(x) dx \text{ ينتج من تقارب } \int_J g(x) dx \text{ إذا كانت}$$

$f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in J$	$g(x) \leq f(x)$ لكل $x \in J$
$f = o(g)$	$f(x)$ دالة غير سالبة

(٢) إذا كانت $f = O(g)$ عند a وكانت $g = O(h)$ عند a فإن:

$$\begin{aligned} a \text{ عند } g = O(f) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) & \quad a \text{ عند } f = o(g) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \\ a \text{ عند } f = O(h) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) & \quad a \text{ عند } f = o(h) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \end{aligned}$$

(٣) لتكن $f(x) = \ln(x)$:

$$\begin{aligned} 1 \text{ عند } f(x) = O(x) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) & \quad 1 \text{ عند } f(x) = O(x-1) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \\ 1 \text{ عند } f(x) = o(1-x) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) & \quad 1 \text{ عند } 1-x = O(f(x)) \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \end{aligned}$$

(٤) إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x) \sin x \, dx$ تباعدي وكانت f دالة موجبة وتناقصية وتؤول للصفر عند ∞ فإن

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x) |\sin x| \, dx & \quad \text{تباعدي} \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) & \quad \int_1^\infty f(x) \cos x \, dx & \quad \text{تباعدي} \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \\ \int_1^\infty f(x) \, dx & \quad \text{تباعدي} \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) & \quad \int_1^\infty f(x) \cos x \sin x \, dx & \quad \text{تباعدي} \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \end{aligned}$$

١١.٢ تمارين

(١) برهن أن التكامل $\int_1^{+\infty} \sin(\sqrt{x}) \, dx$ تباعدي.

(٢) إدرس تقارب كل من التكاملات الآتية

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x \ln x + \sqrt{x}} \, dx & \quad \text{(أ)} & \quad \int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p - x^2} \, dx & \quad \text{(و)} \\ \int_0^1 \frac{1}{x \ln x + x^2} \, dx & \quad \text{(ب)} & \quad \int_1^\infty \sec^2\left(\frac{1}{x^2+3}\right) \tan\left(\frac{1}{2x^2+1}\right) \, dx & \quad \text{(ز)} \\ \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x + \sqrt{x}} \, dx & \quad \text{(ج)} & \quad \int_1^5 \frac{1}{(x-1)} \sin x \, dx & \quad \text{(ح)} \\ \int_{e+1}^\infty \frac{1}{x^p \ln x + \sqrt{x}} \, dx & \quad \text{(د)} & \quad \int_1^\infty 3x \sin(x^3) \, dx & \quad \text{(ط)} \\ \int_{e+1}^\infty \frac{1}{x^p \ln x \ln \ln x + x^q} \, dx & \quad \text{(هـ)} & \quad \int_1^\infty e^{\alpha x} \sin x \, dx & \quad \text{(ي)} \\ & & \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\beta} \cos(x^\alpha) \, dx & \quad \text{(يا)} \end{aligned}$$

(٣) برهن إختبار النسبة: إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, +\infty[$ وكانت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x+1)}{f(x)} \right| = \ell < 1$$

فإن التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ يتقارب تقارب مطلق.